数理解析研究所講究録
696巻 1989年 98-105

リッカチ型微分方程式のリーマン幾何への応用

新潟大理 印南 信宏 (Nobuhiro Innami)

0、主定理.

Nを volume form $d\omega$ をもつ可微分多様体、$f^t: N \to N$ を $d\omega$ を保つ流れとする。$\pi: E \to N$ を内積 $\langle \cdot , \cdot \rangle$ をもつN上のベクトル バンドルとする. $L(E) = \{ D \mid D(p): E_p \to E_p$ は各 $p \in N$ に対して線型$\}$、$S(E) = \{ A \mid A(p): E_p \to E_p$ は各$p \in N$に対して対称な線型写像$\}$とおく。そこで、f^tにそって次のような接続が定義されているとする。

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

ここで、Xはf^tを生成するN上のベクトル場、Y, ZはEへの任意のセクションである。$A \in S(E)$に対して、流れにそったヤコビ型の微分方程式

(J_A) $\quad \nabla_X \nabla_X Y + AY = 0$

と $L(E)$-valued リッカチ型微分方程式

(R_A) $\quad \nabla_X U + U^2 + A = 0$

を考える。すべての流れの跡 $\{f^t \mid -\infty<t<\infty\}$ にそって互いに共役な点が存在しないとき、(J_A) は N で共役点を持たないという。この定義は、(R_A) が流れの各跡 $\{f^t p \mid -\infty<t<\infty\}$ にそってその定義域が $(-\infty, \infty)$ である対称な解をもつことと同値である([3])。

主定理： $A \in S(E)$ で (J_A) は N で共役点を持たないとする。非遊走点集合は高々可算個の有限体積で f^t-不変な部分集合に分けられると仮定する。もしも、$|\mathrm{tr}\, A|$ が N で積分可能ならば、

$$\int_N \mathrm{tr}\, A \, d\omega \leq 0$$

が成り立つ。等号が成立するのは恒等的に $A=0$ のときに限る。

ここで、$p_n \to p$, $t_n \to \infty$, $f^{t_n} p_n \to p$ となる点列 $\{p_n\} \subset N$ と数列 $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ が存在するときに、$p \in N$ は流れ f^t の非遊走点といわれる。

主定理の証明は[6]にある定理と同様にできる。すなわち、有限体積非遊走点集合 Ω 上では Birkhoff の個別エルゴード定理を用いて $\mathrm{tr}\, A$ を積分する。$N-\Omega$ 上では累次積分に関する Fubini の定理を用いて $\mathrm{tr}\, A$ を積分する。この定理の動機と応用を以下に挙げる。

1、 E. Hopf と L. Green の定理。

Mを完備リーマン多様体、$N=SM$ を単位接バンドルとする。$d\sigma$ をM上のリーマン計量からはいる体積要素、$d\theta$ を単位球面 S^{n-1} の標準体積要素として、N上の体積要素を $d\omega = d\sigma \wedge d\theta$ で定義する。測地流 $f^t : N \to N$ を考える。すなわち、任意の $v \in N$ に対して $f^t v$ は $\gamma(0)=\pi(v)$、$\dot\gamma(0)=v$ で定まるMの測地線 γ の t における接ベクトル $\dot\gamma(t)$ である。f^t は $d\omega$ を保つ。任意の $v \in N$ に対して、$v^\perp = \{ w \in T_{\pi(v)}M \mid \langle w, v \rangle = 0 \}$ とし、$E = \bigcup_{v \in N} v^\perp$ とおく。Mのリーマン接続は第0節で仮定した条件を満たしている。KをMのリーマン曲率テンソルとする。すなわち、M上の任意のベクトル場 Y、Z，W に対して、

$$\nabla_Y \nabla_Z W - \nabla_Z \nabla_Y W - \nabla_{[Y,Z]} W = K(Y,Z)W$$

で定義される．任意の $v \in N$ に対して、$A(v) = K(\cdot, v)v$ によってAを定義すると $A \in S(E)$ である。この記号のもとでE. Hopf と L. Green は次の定理を示した。

定理： Mはコンパクトで共役点を持たないリーマン多様体とする．そのとき、tr A の積分の値は非正であり、Mが平坦であるときにのみ0になる。

この定理においては、tr A の積分がMのスカラー曲率のM上での積分の定数倍に等しいことを注意しておく。[6]において積分の方法を改善し、この定理の位相に関する仮定は

一般化されている。主定理はこの定理の積分不等式がリーマン幾何から出てくるのではないことを示している。このことに注意すると次の定理Aが思いつく。定理Aの中でSはMのスカラー曲率を表わす。

定理A：　Mの断面曲率はあるコンパクト集合の外では非負で、Mの次元は3以上とする。次の性質をみたすM上の関数Fが存在したとする。

(1)　$(J_{A-(F\circ\pi)I})$ はN上で共役点を持たない。

(2)　$|\mathrm{tr}(A-(F\circ\pi)I)|$ はNで積分可能である。

そのとき、

$$\int_M (S-n(n-1)F)\,d\sigma \leq 0$$

が成り立つ。等号はMが定曲率空間の時に限り、特に、Mがコンパクトでないならば、Mは平坦である。

証明の概略は以下のとおり。関数 $F: M \to \mathbb{R}$ が凸であるとは、任意の測地線 $\alpha: (-\infty,\infty) \longrightarrow M$ に対して、$F\circ\alpha$ が1変数凸関数になる場合をいう。あるコンパクト集合の外で非負断面曲率のリーマン多様体上には、すべてのサブレベル集合がコンパクトであるリプシッツ連続凸関数が存在する([8])。この関数のすべてのサブレベル集合は全凸(totally convex)であるから、Mの測地流の非遊走点集合は有限体積をもつ。このようにして主定理が適用できる形となる。等号が成立す

れば、N上で $A=(E\circ\pi)I$ である。Schur の補題「3以上の次元のリーマン多様体において断面曲率が点の関数となるならば定曲率空間である。」を適用して、定理Aの結論を得る，

2．勾配流

N、$d\omega$、f^t は第0節と同じとする。$E=TN$、$\langle\cdot,\cdot\rangle$ をN上の完備なリーマン計量とする。リーマン接続を ∇ によって表わす。$P(t,p)$ は曲線 $c_p:[0,t]\to N$，$c_p(s)=f^s p$ に沿うpから $f^t p$ までの ∇ に関する平行移動とする．すべての $p\in N$ と $t\in\mathbb{R}$ に対して、$D(t,p)=df_p^t\circ P(t,p)^{-1}$ とおく。$D(t,p)$ は c_p にそう(1,1)型テンソルである．これを使って、N上の(1,1)型テンソル U、A を次のように定義する．すべての $p\in N$ に対して、

$$U(p)=\nabla_X D(0,p)\left(=\frac{d}{dt}D(t,p)\Big|_{t=0}\right).$$

$$A(p)=-\nabla_X\nabla_X D(0,p).$$

D、U、A は次の微分方程式を満たす。

(L_U)　　$\nabla_X D(t,p)=U(f^t p)D(t,p)$

(J_A)　　$\nabla_X\nabla_X D(t,p)+A(f^t p)D(t,p)=0$

(R_A)　　$\nabla_X U(f^t p)+U(f^t p)^2+A(f^t p)=0$

U が対称で $\langle X,X\rangle$ がN上定数であれば流れ f^t の跡はNの測地線となり、AはNの曲率テンソルである。(J_A) がN上

共役点を持たない場合に、流れf^tは共役点を持たないという。Uが対称ならばf^tは共役点を持たないことが知られている。それ以上に、Uが対称であるための必要十分条件は、Xの普遍被覆空間へのリフトが勾配流となることである。主定理の応用として次の定理Bを得る。

定理B： 非遊走点集合は高々可算個の有限体積のf^t－不変な集合に分割できるとする。もしも、UがN上対称で$|\mathrm{tr}\,A|$がN上積分可能ならば、

$$\int_N \mathrm{tr}\,A\ d\omega \leq 0$$

が成立する。等号になるのは次の場合に限る。すべての$t \in \mathbb{R}$に対して、f^tは恒等写像であるか、Nとf^tは次のようである。

(1) Nの普遍被覆空間$\tilde{N}$はリーマン積$N_1 \times \mathbb{R}$と等長的である。

(2) f^tの$\tilde{N}$へのリフトを$\tilde{f}^t$とすると、すべての$(p, s) \in N_1 \times \mathbb{R}$と$t \in \mathbb{R}$に対して、$\tilde{f}^t(p, s) = (p, s + at)$となる定数$a$が存在する。

(3) Γを$N = \tilde{N}/\Gamma$となる$\tilde{N}$の等長変換群とする。すべての$\tilde{\varphi} \in \Gamma$は分解している。すなわち、すべての$(p, s) \in N_1 \times \mathbb{R}$に対して、$\tilde{\varphi}(p, s) = (\varphi(p), s + b)$となる$N_1$上の等長変換$\varphi$と定数$b$が存在する。さらに、もしも $\langle X, X \rangle$ がN上

定数であれば上の不等式は

$$\int_N Ric(X)\, d\omega \leq 0$$

と書ける。ここで、$Ric(X)$はXのリッチ曲率である。

注意： f^tが共役点を持たずAが対称であれば定理Bの積分不等式は得られるが、等号の場合に流れを決定することはできない。

系： $X = \mathrm{grad} F$となる関数$F : N \to \mathbb{R}$が存在したとする。もしも、$|\mathrm{tr} A|$がN上で積分可能ならば、

$$\int_N \mathrm{tr} A\, d\omega \leq 0$$

が成り立つ。等号が成立するのはFが定数関数であるか、Fは自明でないアフィン関数の場合に限る。すなわち、任意の測地線$\alpha : \mathbb{R} \to N$に対して、$F \circ \alpha$は高々1次の関数である。後者の場合には、NはRiemann積$F^{-1}(0) \times R$と等長的である([5])。

References

1. Chen, B.-y., "Geometry of Submanifolds", Marcel Dekker, New York, (1973).

2. Green, L., "A theorem of E. Hopf", Michigan Math. J. 5, 31-34(1958).

3. Hartman, P., "Ordinary differential equations",

Wiley, New York, (1964).

4. Hopf, E., "Closed surfaces without conjugate points", Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 34, 47-51 (1948).

5. Innami, N., "Splitting theorems of Riemannian manifolds", Compositio Math. 47, 273-247 (1982).

6. ———, "Manifolds without conjugate points and with integral curvature zero", J. Math. Soc. Japan 41, (1989).

7. ———, "Differentiable flows without conjugate points", preprint.

8. Wu, H., "An elementary method in the study of nonnegative curvature", Acta Math. 142, 57-78 (1979).